# Leçon 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

## Développements :

Densité des polynômes orthogonaux, Théorème de Fourier-Plancherel.

## Bibliographie :

Rombaldi (analyse réelle), Gourdon, Pommellet, Briane et Pages, Rudin, Bernis, ZQ, Rouvière, Brezis, Bethelin, OA, Pabion.

## Rapport du jury 2016 :

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \sin x/x$ , mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Le prolongement par densité et le prolongement analytique relèvent bien sûr de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut par exemple parler de l'extension à $L^2$ de la transformation de Fourier. En ce qui concerne le théorème de Hahn-Banach, le candidat n'en donnera la version la plus générale que s'il peut s'aventurer sur le terrain délicat du lemme de Zorn. Rappelons que l'on peut aussi s'en dispenser pour justifier le théorème de Hahn-Banach de façon plus élémentaire dans le cas séparable.

## Rapport du jury 2017 :

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Le prolongement par densité de certains résultats (comme la continuité de l'opérateur de translation dans $L^p$) et le prolongement analytique relèvent bien sûr de cette leçon. Le prolongement éventuel de la somme d'une série entière sur le bord du disque est une notion qui doit être maîtrisée. Pour aller plus loin, on peut par exemple parler de l'extension à $L^2$ de la transformation de Fourier. Le théorème de Hahn-Banach, dans le cas séparable, peut être un exemple de résultat très pertinent.

**Remarque .1.** *Du jury : Quant au prolongement de la fonction gamma en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, il serait bon de savoir que la relation fonctionnelle $\gamma(z+1) = z\gamma(z)$ permet de le faire en quelques lignes.*

**Definition .2.** *Soient $X$, $Y$ deux ensembles, soit $A \subset X$, soit $f : A \to Y$ . On appelle prolongement de $f$ à $X$ toute application $f' : X \to Y$ telle que $\forall x \in A$, $f'(x) = f(x)$.*

# 1 Aspects topologiques, prolongement par continuité

## 1.1 Prolongement ponctuel (prolongement en un point)

**Proposition .3** (Romb p40)**.** *[Gourdon p16] Prolongement par continuité en un point sur des espaces métriques.*

**Exemple .4** (Romb p40)**.** *Prolongement du sinus cardinal. $x \mapsto e^{-1/x^2}$ (Pommellet p90). $(x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ se prolonge continument en posant $f(0, 0) =$ 0.*

**Contre exemple .5** (Romb p40)**.** *$x \mapsto \sin(1/x)$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0.*

**Application .6.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}^n \in C^1$. Alors $x \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ se prolonge par continuité à $y$ avec $f'(y)$.*

**Exemple .7** (Pommellet p48)**.** *Si $f \in C^1([a, b[, E)$, $E$ Banach, et si $f'$ est bornée sur $[a, b[$ alors $f$ se prolonge par continuité en $b$.*

## 1.2 Prolongement sur une partie dense

**Proposition .8** (Pommellet p40)**.** *Prolongement des identités. Si deux fonctions coïncident sur une partie dense alors elles sont égales.*

**Application .9.** *$\chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

**Theoreme .10** (Pommellet p48)**.** *[Albert p94] Théorème de prolongement des applications uniformément continues.*

**Application .11** (Albert p95)**.** *Si $E$, $E'$ sont des espaces de Banach, $F$ un sous-espace vectoriel dense dans $E$, et $f : F \to E'$ une application linéaire continue, alors $f$ se prolonge en une application linéaire continue $f'$ sur $E$ tout entier, avec $||f'||_E = ||f||_F$ .*

**Application .12** (Pommellet p49)**.** *[Hirsch Lacombe] Construction de Riemann des fonctions réglées.*

*Soit $E$ un espace de Banach et $[a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann est bien définie, linéaire et continue pour $||.||_\infty$ sur l'espace $E([a, b], E)$ des fonctions étagées de $[a, b] \to E$. On peut ainsi la prolonger à $\mathbb{R}([a, b], E) := E'([a, b], E)$ $||.||_\infty$. , l'espace des fonctions réglées de $[a, b] \to E$. On peut en particulier définir l'intégrale de Riemann de fonctions continues.*

**Application .13.** *Lemme de Riemann Lebesgue.*

**Application .14** (Briane p192). *[Bernis] L'inégalité de Hardy.*

**Application .15** (Rudin p225). *Théorème de Fourier Plancherel.*

**Application .16** (Bernis). *Intégrale de* $\sin^2(x)/x^2$.

### 1.3 Prolongement depuis une partie fermée

**Theoreme .17** (ZQ p203). *[Albert p35] Théorème de Tietze.*

**Application .18** (ZQ p222). *Si toute fonction continue de* $X$ *dans* $\mathbb{R}$ *est bornée alors* $X$ *est compact.*

**Exemple .19.** *Pour* $f \in C([a,b],E)$, $E$ *un Banach, on peut prolonger continument* $f$ *sur* $\mathbb{R}$ *de diverses façons comme* $f_1 = 0$ *sur* $\mathbb{R} - [a - 1/n, b + 1/n]$ *ou* $f_1$ $(b-a)$ *périodique sur* $\mathbb{R}$.

**Application .20** (Albert p38). *Soit* $(X,d)$ *un espace métrique,* $Y_1$,$Y_2$ *fermés disjoints de* $X$. *Alors il existe* $f \in C(X,[0,1])$ *tel que* $f = 0$ *sur* $Y_1$ *et* $f = 1$ *sur* $Y_2$.

### 1.4 Prolongement depuis un sev (prolongement des formes linéaires)

**Theoreme .21** (Rouvière p27). *Théorème de Hahn Banach (cas séparable).*

**Remarque .22.** *Si* $E$ *est un Hilbert, la notion d'orthogonal d'un sev donne le résultat sans avoir besoin de dimension finie.*

**Application .23** (Rouvière p27). *Pour tout* $x \in E$, $||x|| = max\{\frac{l(x)}{||l||}\}$ *où le max est pris sur l'ensemble des formes linéaires non nulles sur* $E$.

**Remarque .24** (Pommellet p67). $F$ *est dense dans* $E$ *si et seulement si pour tout* $f \in E'$, *si* $f = 0$ *sur* $F$ *alors* $f$ *est nulle.*

## 2 Aspects différentiels

### 2.1 Prolongement des fonctions régulières

**Theoreme .25** (Pommellet p90). *Dérivée en* $a$ *d'une fonction dérivable sur* $I$ $\{a\}$.

**Remarque .26.** *Il faut un BANACH à l'arrivée car on utilise l'IAF.*

**Remarque .27.** *On peut l'itérer.*

**Contre exemple .28** (Pommellet p90). *Faux sans l'hypothèse de continuité.*

**Exemple .29** (Pommellet p90). $exp(-1/x^2)$ *est prolongeable en une fonction de classe* $C^\infty$.

**Application .30** (Pomm p90). *Une fonction dérivée n'admet que des discontinuités de première espèce.*

**Proposition .31.** *Si* $f$ *est* $C^k$ *, prolongement* $C^{k-1}$ *de* $x \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

**Exemple .32.** *Soit* $f \in C^\infty$ *telle que* $f(0) = 0$. *Alors* $f : x \mapsto f(x)/x$ *est prolongeable de façon* $C^\infty$ *par la valeur* $f'(0)$ *en* $0$.

**Contre exemple .33.** $x \mapsto x\sin(1/x)$ *est* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et se prolonge par continuité en* $0$ *en posant* $g(0) = 0$, *mais ce prolongement n'est pas dérivable en* $0$.

**Contre exemple .34.** *Si* $f$ *est de classe* $C^{k+1}$ *sur* $I$ $\{x\}$, *de classe* $C^k$ *sur* $I$ *et admet un DL à l'ordre* $k+1$ *en* $x$ *alors* $f$ *n'est pas forcément de classe* $C^{k+1}$ *sur* $I$. *Prendre* $f(x) = x^3\sin(1/x)$ *si* $x \neq 0$, $0$ *sinon.* $f$ *admet un DL à l'ordre* $2$ *mais* $f''$ *n'est pas prolongeable en* $0$.

**Application .35** (Pommellet p91). *Construction de fonctions plateaux.*

**Theoreme .36** (Rouvière p359). *Théorème de Borel.*

**Application .37** (Rouvière p359). *Toute fonction* $C^\infty$ *sur un intervalle compact* $[a,b]$ *avec dérivés de tous ordres à droite en* $a$ *et à gauche en* $b$ *peut être prolongée en une fonction* $C^\infty$.

### 2.2 Prolongement de solutions d'équations différentielles

**Remarque .38.** *Voir aussi ZQ p372.*

**Theoreme .39** (Berthelin p83). *Théorème de Cauchy Lipschitz.*

**Proposition .40** (Berthelin p109). *Théorème des bouts.*

**Proposition .41** (Berthelin p109). *Si* $f$ *est bornée alors les solutions sont globales.*

**Exemple .42** (Berthelin p110). $y' = sin(y)$.

**Application .43.** *Théorème d'Hadamard Lévy.*

### 2.3 Prolongement périodique et solution d'EDP

**Remarque .44.** *Soit* $T > 0$. *Toute fonction* $u$ *continue sur* $[0,T]$ *vérifiant* $u(0) = u(T)$ *peut être prolongée par* $T$*-périodicité à* $\mathbb{R}$ *entier.*

**Proposition .45** (Bernis). *Equation de la chaleur.*

# 3 Aspects analytiques

## 3.1 Prolongement au bord des séries entières

**Proposition .46** (Hauchecorne p261)**.** *Série qui converge sur tout le cercle de convergence, qui diverge sur tout le cercle, qui converge en certains points et diverge en d'autres points du cercle.*

**Theoreme .47** (Gourdon)**.** *[Bernis] Théorèmes d'Abel et de Tauber faible.*

## 3.2 Prolongement holomorphe

**Proposition .48** (Pabion p80)**.** *Singularité effaçable.*

**Exemple .49.** sin.

**Proposition .50** (Pabion p83)**.** *Toute fonction holomorphe qui présente une fausse singularité en $a_0$ est prolongeable en une fonction holomorphe en $a_0$.*

**Exemple .51.** sin.

**Proposition .52** (OA p53)**.** *Théorème des zéros isolés.*

**Proposition .53** (OA p54)**.** *Principe du prolongement analytique.*

**Exemple .54** (OA p54)**.** *Unicité du prolongement analytique de $\zeta$.*

**Application .55.** *Densité des polynômes orthogonaux.*

**Exemple .56** (OA p77)**.** *Il existe une unique fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(1/n) = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**Exemple .57.** *Prolongement de $\Gamma$.*

**Proposition .58** (Bernis)**.** *Formule des compléments.*

**Proposition .59** (Pabion p74)**.** exp *et les fonctions circulaires sont les seules fonctions entières qui prolongent les fonctions réelles correspondantes.*